ГЛАВА 3
# МНОГОМЕРНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Организация морфологической структуры характеризуется многомерными связями между ее параметрами, устанавливаемыми методами стереометрии. Эти многомерные связи в объединении с метрическими свойствами объекта дают ему системную характеристику, изменяющуюся в условиях патологии, что в целом, как указывалось выше, можно записать в виде следующего выражения (см. главу 1):

$$M' \subset M_1' \cup M_2' \begin{cases} M_1' \in \{a_2, a_3, \ldots a_n\} \\ M_2' \in \{b_2, b_3, \ldots b_n\} \end{cases} \qquad (140)$$

В данном выражении в элементы первого подмножества не включено одно из стереометрических свойств микро- или макроструктур морфологического объекта, которое принято использовать как функцию остальной совокупности элементов:

$$y=f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots x_j, \ldots x_n), \qquad (141)$$

которая дает всю информацию о подмножестве связей $M^1_2$ множества $M^1$ (здесь символы $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ заменены принятыми в многомерном анализе обозначениями: $y_1$, $x_1$, $x_2$, $x_i$, $x_j$).

Естественно, такой подход намного труднее, чем двумерный анализ, поскольку число возможных теоретических функций, описывающих реальную аналитическую зависимость, несравненно больше, а сложность многомерных пространств затрудняет выбор наиболее подходящей кривой. В связи с недостаточным развитием теории исследуемого процесса для решения такой задачи наиболее близкую многомерную кривую обычно подбирают эмпирическим способом.

В простейшем случае анализ можно проводить путем представления зависимости в виде многочлена, который имеет вид:

$$y=b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots b_nx_n, \qquad (142)$$

где $y$ — значение функции («входа» системы); $b_0$ — значение свободного члена; $x_1$, $x_2$, $x_3$, … $x_n$ — значения аргументов («выхода» системы); $b_1$ — $b_n$ — коэффициенты множественной регрессии при аргументах.

По необходимости могут быть использованы другие многомерные функции, преимущественно те, которые путем преобразований можно свести к линейному случаю. Примером таких функций могут быть

$$\text{экспоненциальная } y=e^{b_0} + b_1x_1 + b_2x_2 \cdots + b_nx_n \qquad (143)$$

$$\text{гиперболическая } y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2} \cdots + \frac{b_n}{x_n} \qquad (144)$$

$$\text{степенная } e^{b_o} \cdot x^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \qquad (145)$$

и другие функции

Анализ проводят также по нескольким многомерным функциям, а затем, используя всю совокупность параметров многомерного корреляционного и регрессионного анализа, выбирают ту, которая дает наилучшее приближение. Проблема выбора наилучшей аппроксимирующей функции не так проста, как кажется на первый взгляд, и одних параметров многомерного корреляционно-регрессионного анализа недостаточно. Тип функции часто приходится выбирать произвольно, учитывая предыдущий опыт и знания (Кадыров Х.К., Антамонов Ю.Г., 1974; Мисюк Н. С. и др., 1975).

В процессе проведения многомерного анализа для удобства все переменные: y, $x_1$, $x_2$, … $x_n$, берут в стандартизованном масштабе, за начало отсчета для каждой переменной принимая значение ее средней арифметической, а за единицу измерения — соответственно величину среднего квадратического отклонения. Это позволяет перейти к новым переменным $t_y$ и $t_{xi}$ :

$$t_y = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \quad (146) \qquad t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{s_{x_i}} \quad (147)$$

Тогда уравнение регрессии в стандартизованном масштабе записывают выражением:

$$t_y = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 \cdots \beta_n t_n \, , \quad (148)$$

где $\beta_i$ — стандартизованные коэффициенты регрессии.

Подбор коэффициентов многомерного уравнения регрессии, и в случае парных корреляций, проводят на основе метода наименьших квадратов, согласно которому сумма квадратов отклонений фактических значений $t_1$ от расчетных t в уравнении регрессии будет наименьшей, т.е.

$$\sum (t_y - t_y)^2 = \min. \quad (149)$$

Для решения многомерного уравнения регрессии строят систему прямолинейных зависимостей:

$$\begin{aligned} r_y x_i &= \beta_1 + \beta_2 r x_2 x_1 + \cdots \beta_k r x_k x_1 \\ r_y x_2 &= \beta_2 + \beta_1 r x_1 x_2 + \cdots \beta_k r x_k x_2 \\ r_y x_k &= \beta_k + \beta_1 r x_1 x_k + \cdots \beta_{k-1} r x_{k-1} x_k \, , \end{aligned} \quad (150)$$

где $r_y x_i$ — парные коэффициенты корреляции между всеми аргументами и функцией в решаемом многомерном уравнении регрессии, а $r_x$ парные коэффициенты корреляции между изученными факторами.

После определения стандартизованных коэффициентов регрессии их переводят в натуральный масштаб на основе следующих преобразований:

$$b_1 = b_i \frac{b_y}{s_{x_i}} \quad (151) \qquad b_0 = \bar{y} - \sum_{i=1}^{R} b_i \bar{x}_i \quad (152)$$

где $x_i$ и $s_{Xi}$ — среднее и его среднее квадратическое отклонение для $x_i$ фактора.

Парные коэффициенты корреляции в системе уравнений (150) соответствуют парным коэффициентам корреляции в натуральном масштабе. Парные коэффициенты корреляции показывают степень зависимости между двумя факторами при влиянии на них всех остальных факторов, они такие же, как коэффициенты корреляции в двухмерном анализе. Когда ставятся задачи определения влияния одного фактора на другой с исключением влияния всех остальных факторов, используют частные коэффициенты корреляции. Частные коэффициенты корреляции между факторами $x_i$ и $x_j$ при исключении влияния всех остальных факторов, например для трехмерного анализа, рассчитывают по формуле:

$$r_{yx_i \quad x j} = \sqrt{\frac{r^2_{yx_i} - 2r_{x_y rx_i x_j} r_{x_j y} + r^2_{yx_j}}{1 - r^2_{x_i x_j}}} \tag{153}$$

Кроме парных и частных коэффициентов корреляции, при проведении многомерного корреляционного исследования определяют степень тесноты связи между всеми аргументами и функцией, для чего используют теоретическое множественное корреляционное отношение:

$$h_{yx_i t} = \sqrt{\frac{S^2_{yx_i t}}{s^{\,2}_{y}}} \tag{154}$$

где

$$S^2_{yx_i t} = \frac{1}{n}\sum\left[yx_i - y\right]^2 \tag{155}$$

$$s^{\,2}_{y} = \frac{1}{n}\sum(y - \overline{y})_2 \tag{156}$$

В этих формулах $S^{2}_{yz_i t}$ — дисперсия, обусловленная влиянием фактора и измеряющая колеблемость теоретической поверхности регрессии при $\overline{y}$ = const и $\sigma^2_y$ — дисперсия, измеряющая колеблемость точек корреляционного многомерного пространства вокруг плоскости $\overline{y}$ = const. Эта дисперсия складывается из дисперсии, обусловленной $x_1$, $S^{2}_{yz_i t}$ и дисперсией неучтенных факторов $\sigma_i$t. Величина множественного коэффициента корреляции изменяется в пределах от 0 до 1. При n > [0] можно считать, что между изученными факторами в многомерном уравнении регрессии имеется более или менее тесная связь, которая возрастает при приближении $\eta$ к 1.

Существенность множественного корреляционного отношения определяют по отношению

$$t_h = \frac{n}{s_{\,h}}, \tag{157}$$

где $s_h$ — средняя квадратпческая ошибка множественного корреляционного отношения. При многомерном анализе, как и в случае двухмерного корреляционного анализа, возникает задача определения представительности выборочного множественного корреляционного отношения генеральному, что решается аналогичным образом.

Найденное значение сравнивают с табличным. При прямолинейной зависимости между факторами определяют коэффициент множественной корреляции

$$R_{yx_i} = \sqrt{b_1 r_{yx_1}} + b_2 r_{yx_2} + \cdots b_k r_{yx_k}, \tag{158}$$

который показывает, насколько изменения функции зависят от изменений аргументов. На величину коэффициента множественной корреляции влияет объем многомерной выборки. При одинаковом числе наблюдений и числе влияющих факторов при расчете по формуле

$$R_{yx_i} = 1 - \sqrt{\frac{s^{\,2}{}_{остат.}}{s^{\,2}_{y}}} \tag{159}$$

коэффициент множественной корреляции всегда равен 1, поэтому вводят поправку

$$R = \sqrt{1 - \frac{n-1}{n-k-1}\left[1 - R_{yx_i}\right]^2}. \qquad (160)$$

Значение коэффициента множественной корреляции берется положительным (по абсолютной величине). В случае необходимости проводится проверка на скоррелированность или ее коррелированность того или иного фактора с остальными факторами множественного уравнения регрессии. Некоррелированные факторы для получения более надежной зависимости выбрасывают.

Для контроля можно использовать остаточную дисперсию, которая находится из формулы

$$s^2_{остат.} = \frac{\sum_{i=1}^{a}(y_i - y_x)^2}{n-k-1} \qquad (161)$$

где $y_x$ и $y_1$ — расчетные и фактические значения функции после подстановки в решенное уравнение типа отобранных факторов, а $k$ — число факторов в многомерном уравнении регрессии. Чем меньше остаточная дисперсия, тем ближе оценочные значения функции к опытным и тем лучше аппроксимация.

Полученное многомерное уравнение регрессии проверяют на адекватность по дисперсионному отношению

$$F = \frac{s^2_y}{s^2_{остат.}} \qquad (162)$$

в котором $\sigma^2_{остат.}$ — остаточная дисперсия и $\sigma^2_y$ — дисперсия фактических значений функции. Полученные $F_1$ сравнивают с табличными F при выбранном уровне значимости критерия Фишера (Приложение II, табл. 7). Чем больше $F_1$, тем ближе теоретическое значение к опытному и тем лучше приближение.

Об адекватности судят не только по дисперсионному отношению, но еще и по показателю средней ошибки приближения:

$$E = \frac{1}{n}\sum\frac{\bar{y}_i - y_i}{y_i}\cdot 100\%, \qquad (163)$$

которая при принятом уровне безошибочного суждения должна быть меньше 5; 2,5% и т.д. Если $E$ окажется больше принятого предела, полагают, что построенное многомерное уравнение регрессии неадекватно истинной зависимости, и его заменяют новым.

Морфологам при построении системных моделей структурной организации биосистем на основе сведений о принципах количественно-пространственной организации образующих их элементов нет необходимости детально разбираться в теории многомерного корреляционного анализа. Достаточно знать только общую схему проведения такого эксперимента. Все вопросы могут быть решены при помощи персонала, обслуживающего ЭВМ, а для построения моделей можно использовать уже готовые статистические программы (Приложение III). Одной из программ, позволяющих построить многомерные модели, является программа ПРА-3, составленная для ЭВМ типа «Минск-22».

Программа ПРА-3 предусматривает также определение множественного и частных коэффициентов детерминации. Множественный коэффициент детерминации является квадратом множественного коэффициента корреляции:

$$D = R^2 \quad (164)$$

и характеризует удельный вес влияния на функцию всех аргументов построенного многомерного уравнения регрессии. Для определения долевого вклада каждого фактора в общее изменение уравнения регрессии используют частные коэффициенты детерминации, которые определяются из соотношения

$$a_i = b_i r_{yx_i}. \quad (165)$$

В сумме частные коэффициенты детерминации должны давать коэффициент множественной детерминации.

При построении многомерных уравнений регрессии использования программы ПРА-3 ЭВМ «Минск-22» в печатном виде выдаются массивы чисел-результатов, каждый из которых легко идентифицируется по признакам.

Существуют и такие варианты программы, в которых все результаты выдаются в виде таблиц. Приводим в качестве примера таблицу из работы Н.И. Яблучанского и Е.В. Жданова (1977) (табл. 11).

Многомерный анализ системной модели количественно-пространственной организации лимфатического русла эпикарда обоих желудочков сердца собаки (Автандилов Г.Г. и др., 1977) проводился в следующем порядке. Пусть поставлена задача изучить зависимость между величиной сердца («вход» принятой системы) и набором количественных параметров, характеризующих метрические свойства капиллярных сегментов, таких, как диаметр ($D_c$), длина ($L_c$), количество ($N_c$), объем ($V_c$), поверхность ($S_c$), безразмерный коэффициент удельной поверхности ($\gamma_c$), удельные длина и количество капилляров («выход» системы).

Для изучения зависимости линейных параметров метрических свойств капилляров от размеров сердца за его характеристику приняли показатель длины, как корень кубический из объема $(L = \sqrt[3]{v})$. Исследования на каждом сердце указанных параметров проводили согласно рассматриваемым в первой части книги методам. Все результаты, т.е. все количественные характеристики метрических свойств капилляров одного сердца, можно принять за систему случайных величин. Исследования были проведены на 26 сердцах взрослых беспородных собак массой от 16 до 26 кг. Результаты замеров были сгруппированы в табл. 12.

Представленные в таблице количественные показатели метрических свойств лимфатических капилляров представляют собой межгрупповые средние арифметические, полученные при исследовании большого числа образцов в одном сердце и их объединении согласно важнейшим математическим свойствам средних и их дисперсий после проверки количественных показателей изученных метрических свойств лимфатических капилляров разных участков органа на принадлежность к одной генеральной совокупности. Эта таблица и представляет собой информационный массив для многомерного анализа. Последний осуществляется посредством введения данного информационного массива в ЭВМ «Минск-22» и его обработки по программе ПРА-3.

Многомерный корреляционный анализ проводили отдельно для линейных и объемных показателей, который можно описать двумя уравнениями:

$$L = f(D_c, L_c, N_c, L_s^c); \quad (166)$$

$$V = f(V_c, g_c) \quad (167)$$

Результаты многомерного анализа линейных параметров метрических свойств лимфатических капилляров эпикарда сведены. в табл. 13, а результаты многомерного анализа объемных показателей — соответственно в табл. 14.

Таблица 11

**Многомерный анализ зависимости между возрастом *(y)*, объемной плотностью клеток *($x_1$—$x_4$)* и микрососудов ($x_5$—$x_8$) в коре головного мозга человека**

| Объемные Плотности | | Коэффициент регрессии: масштаб | Коэффициент регрессии: натуральный | Критерий Стьюдента | Коэффициент корреляции: парные | Коэффициент корреляции: частные | Частный Коэффициент детерминации | Внутренняя мера определения | Уравнение парной регрессии: B | Уравнение парной регрессии: A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Клетки | $x_1$ | —0,020 | 97,160 | 1,557 | –0,080 | 0,184 | –0,001 | 0,875 | –756,638 | 279,613 |
| | $x_2$ | —0,003 | – 33,831 | –0,332 | –0,104 | 0,039 | 0,000 | 0,830 | –923,537 | 320,882 |
| | $x_3$ | —0,029 | –235,638 | –2,171 | –0,063 | –0,252 | 0,001 | 0,874 | –516,622 | 227,785 |
| | $x_4$ | —0,028 | –231,021 | –1,898 | –0,085 | –0,222 | 0,002 | 0,900 | –689,360 | 298,307 |
| Микро-сосуды | $x_5$ | —0,997 | 0,281 | 207,651 | 0,997 | 0,999 | 0,995 | 0,023 | 0,281 | 24,890 |
| | $x_6$ | —0,008 | –143,205 | –1,234 | 0,085 | –0,147 | –0,000 | 0,560 | 1392,415 | –431,733 |
| | $x_7$ | —0,017 | 239,930 | 2,361 | 0,039 | 0,273 | 0,000 | 0,611 | 522,368 | 115,592 |
| | $x_8$ | —0,000 | 2,055 | 0,024 | 0,115 | 0,002 | 0,000 | 0,726 | 1063,061 | –360,904 |
| Свободный член | | | 83,9532 | | | | | | | |

Характеристики *x:*

1. Коэффициент множественной корреляции 0,9991
2. Коэффициент множественной детерминации 0,9984
3. Остаточная дисперсия натуральная 417,9249
4. Общая дисперсия 237705,50
5. Учитываемая дисперсия 2083623

Продолжение

| **Параметры: $x_1x_2$** | | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Матрица коэффициентов парной корреляции | | | | | | | |
| — 0,804 | —1047 | —0636 | —0850 | +9979 | +0869 | +0391 | +1153 |
| | +8973 | +8753 | +8863 | —0400 | —6960 | —7373 | —7879 |
| | +8392 | +392 | +8411 | —0646 | —7051 | —7172 | —7498 |
| | | | +9239 | —0165 | —6670 | —6980 | —7771 |
| | | | | —0379 | —6379 | —7022 | —8372 |
| | | | | | +0574 | —0008 | +0750 |
| | | | | | | +6493 | +5457 |
| | | | | | | | +6788 |
| Матрица частных коэффициентов корреляции | | | | | | | |
| +1842 | —0399 | —2529 | —2227 | +9992 | —1470 | +2734 | +0029 |
| | +4793 | +1926 | +2610 | —1833 | —0771 | —1745 | —0950 |
| | | +0957 | +0473 | +0373 | —2017 | —0706 | —0497 |
| | | | +5165 | +2551 | —1559 | +0423 | +0439 |
| | | | | +2224 | +0167 | +0693 | —3814 |
| | | | | | +1492 | —2763 | +0005 |
| | | | | | | +2863 | —1031 |
| | | | | | | | +1974 |
| Матрица коэффициентов корреляции между коэффициентами уравнения агрессии | | | | | | | |
| — 4805 | —1535 | —2295 | —0193 | +1071 | +1312 | +0961 | |
| | —1095 | —0577 | +0654 | +1981 | +0848 | —0499 | |
| | | —6069 | —0642 | +1241 | +0288 | —0446 | |
| | | | +0045 | —0513 | —0089 | +3920 | |
| | | | | —0583 | +0809 | —0882 | |
| | | | | | —2587 | +1047 | |
| | | | | | | —2061 | |

Таблица 12

**Стереометрические показатели, характеризующие лимфатические сосуды эпикарда собаки**

| № | V, мл | P, г | $D_c$ | $L_c$ | $V_c$ | $L^c_s$ | $N_c$ | $g_c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 40 | 48 | 0,081 | 0,026 | 12,27 | 164 | 33 | 72 |
| 2 | 50 | 53 | 0,095 | 0,030 | 10,43 | 131 | 43 | 88 |
| 3 | 60 | 62 | 0,096 | 0,033 | 10,42 | 110 | 53 | 92 |
| 4 | 60 | 65 | 0,104 | 0,036 | 9,88 | 94 | 61 | 92 |
| 5 | 61 | 69 | 0,111 | 0,038 | 9,94 | 89 | 64 | 113 |
| 6 | 62 | 67 | 0,118 | 0,045 | 7,47 | 68 | 115 | 129 |
| 7 | 67 | 75 | 0,111 | 0,049 | 6,18 | 56 | 140 | 122 |
| 8 | 75 | 83 | 0,120 | 0,053 | 6,77 | 57 | 166 | 148 |
| 9 | 80 | 87 | 0,127 | 0,053 | 6,99 | 56 | 196 | 157 |
| 10 | 85 | 93 | 0,127 | 0,055 | 6,99 | 56 | 211 | 160 |
| 11 | 90 | 95 | 0,125 | 0,058 | 6,63 | 59 | 258 | 169 |
| 12 | 96 | 104 | 0,128 | 0,057 | 6,55 | 52 | 261 | 159 |
| 13 | 105 | 115 | 0,128 | 0,057 | 6,11 | 49 | 282 | 167 |
| 14 | 110 | 117 | 0,136 | 0,060 | 6,07 | 45 | 301 | 153 |
| 15 | 115 | 123 | 0,079 | 0,060 | 5,32 | 43 | 327 | 160 |
| 16 | 120 | 127 | 0,142 | 0,078 | 5,66 | 37 | 359 | 188 |
| 17 | 130 | 138 | 0,157 | 0,071 | 4,71 | 30 | 373 | 182 |
| 18 | 140 | 147 | 0,160 | 0,074 | 4,42 | 28 | 381 | 192 |
| 19 | 150 | 157 | 0,155 | 0,071 | 4,81 | 31 | 280 | 189 |
| 20 | 158 | 165 | 0,162 | 0,075 | 4,73 | 29 | 421 | 207 |
| 21 | 160 | 169 | 0,164 | 0,074 | 4,52 | 28 | 407 | 192 |
| 22 | 166 | 175 | 0,158 | 0,076 | 4,20 | 27 | 499 | 200 |
| 23 | 172 | 180 | 0,176 | 0,075 | 4,61 | 27 | 395 | 203 |
| 24 | 190 | 199 | 0,190 | 0,083 | 4,55 | 24 | 564 | 203 |
| 25 | 210 | 219 | 0,190 | 0,086 | 4,28 | 23 | 647 | 251 |
| 26 | 218 | 227 | 0,187 | 0,093 | 4,20 | 23 | 776 | 289 |

Таблица 13

**Данные многомерного анализа линейных характеристик метрических свойств лимфатических капилляров эпикарда собаки**

| Пока-Затели | Натуральный коэффициент регрессии | Коэффициенты корреляции: парные | Коэффициенты корреляции: частные | Частные коэффициенты детерминации | Внутренняя мера определенности | Уравнение парной регрессии: A | Уравнение парной регрессии: B | Коэффициент Стьюдента |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_k$ | 14,026 | 0,716 | 0,875 | 0,039 | 0,540 | 22,951 | 181,066 | 0,815 |
| $D_k$ | 439,802 | 0,954 | 0,863 | 1,157 | 0,911 | 23,909 | 345,990 | 7,828 |
| $L_{vk}$ | 3,220 | —0,825 | 0,536 | —1,085 | 0,989 | 60,446 | —2,020 | 2,910 |
| $N_{vk}$ | —0,225 | —0,852 | —0,418 | 0,843 | 0,990 | 57,240 | —0,194 | —2,113 |
| Свободный член 6,264 | | | | | | | | |

Характеристики показателей:

1. Скорректированный коэффициент множественной корреляции 0,9730
2. Коэффициент множественной детерминации 0,9553
3. Остаточная дисперсия натуральная 3,0006
4. Общая дисперсия 54,244
5. Учитываемая дисперсия 280,245

Следует заметить, что функцию «входа» такой многомерной модели стереометрической организации лимфатических капилляров эпикарда, кроме объема сердца и его линейной характеристики, может выполнить масса сердца, так как между объемом и массой существует тесная зависимость с коэффициентом корреляции в 0,9992 и отношением общей дисперсии (1) к остаточной (2) в 705,0 (табл. 15).

Таблица 14

**Данные многомерного анализа объемных характеристик метрических свойств лимфатических капилляров эпикарда собаки**

| Показатели | у | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Натуральный коэффициент регрессии | Частный коэффициент корреляции | Частный коэффициент детерминации | Критерий Стьюдента | Уравнения парной регрессии | |
| | | | | | А | В |
| $V_k$ | 0,177 | 0,541 | 0,639 | 3,090 | 38,398 | 0,258 |
| $\gamma_k$ | 3090,902 | 0,290 | 0,297 | 1,455 | —43,319 | 9456,791 |
| Свободный член 10,684 | | | | | | |

Характеристики показателей:
1. Скорректированный коэффициент множественной корреляции 0,9654
2. Коэффициент множественной детерминации 0,9375
3. Остаточная дисперсия натуральная 78,7995
4. Общая дисперсия 2532,023
5. Учитываемая дисперсия 21396,340

Таблица 15

**Результаты статистического анализа зависимости между объемом и массой сердца**

| Натуральный коэффициент регрессии | Коэффициент корреляции | Коэффициент детерминации | Свободный член |
|---|---|---|---|
| 1,027 | 0,9992 | 0,998 | 3,726 |

1. Остаточная дисперсия натуральная 3,8899
2. Общая дисперсия 2637,019
3. Учитываемая дисперсия 35603,950

Результаты анализа показали тесную корреляционную связь между изученными факторами и их весомый вклад в общее изменение уравнений регрессии. Причем факторы $D_c$, $L_c$, V, S имеют положительную корреляцию с величиной сердца, а факторы $Ls^{и}$ , $N_c$ находятся в обратной зависимости от размеров органа.

Тесную связь изученных факторов с величиной органа характеризуют высокие значения коэффициентов парной корреляции, которые во всех случаях для обоих уравнений находились в промежутке 0,85—0,97 с положительным для $D_c$, $L_c$ и отрицательным для $L^c_s$ , $N_c$ знаков. Более низкие значения частных коэффициентов корреляции для этих же факторов свидетельствовали, что корреляция в норме между двумя некоторыми факторами реализуется и через влияние совокупности всех остальных факторов.

Результаты, приведенные в табл. 14 и 15, представляют в совокупности стереометрическую модель системной организации лимфатического русла капилляров эпикарда в норме и могут быть использованы в качестве исходных при изучении адаптации и патологии различного генеза в системе микроциркуляции сердца.

Причем в последнем случае нет необходимости в формировании большой выборки, так как каждый изучаемый объект по набору факторов можно сравнить с исходной моделью. Другим методом по рассчитанным многомерным уравнениям по величине препарата можно получить необходимые для исходного уровня статистики количественных показателей метрических свойств лимфатических капилляров и сравнить с реальными значениями последних.

В качестве второго примера приведем изучение зависимости между массой крысы и массой некоторых ее органов. Опыты выполнены на крысах одной линии массой 80—280 г. После смерти животных сразу определяли их массу, а также показатели массы внутренних органов. Ошибка измерений в каждом случае не превышала 0,5% массы органа, что достигалось применением соответствующих технических средств. Результаты замеров органов разных животных, принятые за систему случайных величин, группировали в информационный массив по массе крыс. Данные после занесения на перфоленту вводили в ЭВМ «Минск-32» и обрабатывали по программе ПРА-3. Приближения проводили линейной, гиперболической, степенной и показательной функциями. Для сравнительного анализа степени приближения каждой из указанных функций использовали абсолютные значения (модули) парных, частных и множественных коэффициентов корреляции, частных и множественного коэффициентов детерминации, остаточной, учитываемой и общей дисперсии, а также значения коэффициентов корреляции между аргументами уравнений регрессии.

Результаты исследований показали, что по величине множественного коэффициента корреляции, значениям парных и частных коэффициентов корреляции и по отношению остаточной дисперсии к учитываемой наилучшее приближение дала гиперболическая функция.

Однако следует учесть, что структура коэффициентов при аппроксимации гиперболической зависимостью существенно отличалась от установленных для остальных функций. В частности, коэффициенты в множественном и парных уравнениях регрессии, связывающих величину массы животного с массой печени, сердца, надпочечников, поджелудочной и щитовидной желез, а также гипофиза при приближении гиперболой оказались отрицательными. Между тем при аппроксимации остальными функциями (линейная, степенная и показательная) структура коэффициентов была однотипной и отличалась от таковой для гиперболы. В частности, отрицательные коэффициенты корреляции отмечены только для массы печени и гипофиза, что хорошо коррелирует с известными представлениями об особенностях роста указанных органов. Это позволило выбрать модель линейной зависимости, для которой все коэффициенты были несколько выше, чем в остальных функциях.

Более слабую аппроксимацию линейной функцией по сравнению с гиперболической можно увидеть не только по оценкам парных коэффициентов корреляции, но и по значениям учитываемой, остаточной и общей дисперсий. Так, если для обеих моделей общая дисперсия была одинаковой, то в случае линейной аппроксимации учитываемая дисперсия оказалась ниже.

Увеличение массы органов крысы при увеличении ее массы характеризуется многомерными связями. Подтверждением этому служат выявленные различия в величине частных и парных коэффициентов корреляции, когда парные коэффициенты корреляции для обеих моделей были существенно выше по сравнению со значениями частных коэффициентов корреляции. Причем обращает на себя внимание отрицательная корреляционная связь при линейном приближении между массой животного и массой печени и гипофиза только по оценке частных коэффициентов корреляции, тогда как парные коэффициенты корреляции были положительными.

При росте животного отмечается высокая корреляция не только между массой крыс и массой отдельных органов, но и между показателями массы разных органов. Интересно также, что показатель массы печени имеет отрицательную корреляцию не только с массой крысы, но и е массой других органов, тогда как парные корреляции между показателями массы остальных органов (за исключением гипофиза) были положительными. Соответствие по степени и виду (положительная  или отрицательная) связи между аргументами уравнения регрессии в гиперболических и линейных моделях свидетельствует о разном виде законов роста разных органов животного. Поэтому следует при проведении многофакторного анализа массы структурных элементов организма использовать разные типы моделей, а не ограничиваться выбором какой-то одной хорошо аппроксимирующей функции.

Из анализа таблиц также следует, что теснота связи между разными парами факторов не всегда четко соответствует параметрам, установленным для величины массы животного.

Многомерный регрессионный анализ позволяет вскрыть закономерности, которые морфологически и при простом стереометрическом исследовании не выявляются.

Например, П.Г. Кондратенко (1976) получил модель зависимости между величиной диаметра альвеолярных ходов ($D_{ах}$), диаметра альвеолы ($D_а$), ширины ($Ш_а$), голубины ($Г_а$) альвеол, а также толщины межальвеолярных перегородок ($Т_{мп}$) нормального легкого собаки в виде уравнения:

$$D_{ах} = 0{,}0053 + 1{,}704D_а + 0{,}915Ш_а + 8{,}406T_{мп} – 0{,}090Г_а \qquad (168)$$

и использовал ее для анализа различных типов компенсаторной эмфиземы. Установлено, что компенсаторная эмфизема легких проявляется увеличением линейных размеров респираторных бронхов, альвеолярных ходов, альвеол за счет снижения удельного объема межальвеолярных перегородок, уменьшения удельной альвеолярной поверхности и нарушением корреляционных отношений, характерных для системной модели. Из модели следует, что адаптационная и компенсированная эмфизема характеризуется только изменением указанных параметров без нарушения корреляционных связей, в то же время пограничная компенсаторная эмфизема, переходящая в декомпенсированную форму, характеризуется нарушенными корреляционными связями между основными морфофункциональнымн параметрами легкого.

Приведенные выше примеры подтверждают представления о том, что многомерный корреляционно-регрессионный анализ является важным инструментом для изучения системных отношений стереометрических показателей морфоструктур. Метод необходимо применять только там, где он нужен, где он действительно может дать дополнительные сведения о структурной перестройке морфологических объектов, особенно в тех случаях, когда одного описания препаратов недостаточно для диагноза.